EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA ENGENHARIA CIVIL: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Diva M. Flemming – flemming@iaccess.com.br
Elisa F. Luz – elisa@pa.unisul.rct-sc.br
Robson Wagner - rowag@zipmail.com.br
UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina
NEEM – Núcleo de Estudos em Educação Matemática
Cidade Universitária Pedra Branca
88130-000 – Palhoça – SC

Resumo. *Esse trabalho apresenta os resultados já validados de um projeto de pesquisa participativa, no contexto do ensino das equações diferenciais. A partir de um referencial teórico, uso das representações semióticas, estabelece-se uma seqüência didática alicerçada numa concepção construtivista. A proposta foi implementada em sala de aula, com a participação efetiva dos autores desse artigo (dois professores pesquisadores e um aluno de iniciação científica). A experiência está apresentada através de um problema prático e clássico – cálculo de deformação de vigas. Essa proposta foi concretizada envolvendo o conteúdo das disciplinas Física e Resistência dos Materiais. Cinco etapas são construídas no desenvolvimento do problema: (1) organização dos dados do problema; (2) relacionamento entre as variáveis e parâmetros; (3) análise e formulação da equação diferencial; (4) resolução da equação e (5) análise dos resultados obtidos. A metodologia usada tem uma dimensão interdisciplinar tendo em vista que professores e alunos compartilham conceitos, linguagens e métodos. Atualmente vivencia-se uma ampliação de objetivos envolvendo os recursos computacionais. As estratégias discutidas interferem nas etapas (4) e (5) em que o computador é usado como ferramenta que propicia a formatação de diversos registros de representação semióticas. Isso resgata todo o referencial teórico adotado desde a concepção do projeto.*

Palavras-chave: *Equações diferenciais, Representações semióticas, Flexão de vigas.*

1. INTRODUÇÃO

Atualmente em todos os currículos de Engenharia tem-se uma disciplina que contempla o ensino das equações diferenciais. Em geral, essa disciplina é ministrada com uma visão de conteúdo básico, isto é, não existe uma preocupação em personalizar o curso para cada tipo de engenharia. A estratégia didática utilizada é bastante tradicional seguindo um delineamento próximo ao livro texto adotado.

Os textos usados utilizam praticamente a mesma metodologia: introdução ou conceitos iniciais, técnicas de resolução das equações e aplicações. Em sala de aula os professores eventualmente trabalham algum problema considerado adequado e acessível aos alunos.

Artigue (1995) apresenta uma experiência, salientando que na França o ensino das equações diferenciais no ciclo básico universitário se limita ao quadro algébrico apesar de existir várias outras abordagens (quadro numérico, quadro geométrico). Isso evidentemente dá aos estudantes uma visão limitada e às vezes falsa de um problema.

A primeira autora desse artigo vivenciou em cursos de pós-graduação (mestrado em Engenharia Civil) situações em que as dificuldades dos alunos para modelar um problema que envolve equação diferencial são evidenciadas. Várias causas podem ser listadas, dentre elas têm-se as estratégias didáticas usadas na graduação, que não contemplam a análise crítica e reflexiva de problemas práticos.

A análise crítica e reflexiva de um problema envolve um processo bastante complexo, pois além da especificidade de cada área envolvida tem-se o resgate de diversos conceitos, por exemplo, conceitos físicos.

Nesse trabalho, os resultados já validados de uma pesquisa participativa são apresentados, envolvendo as autoras, um aluno da Engenharia Civil (bolsista de iniciação científica) e alunos da quarta fase da Engenharia Civil da UNISUL - Universidade do Sul de Santa Catarina, campus da Ponte do Imaruim.

2. REFERENCIAL TEÓRICO DA PESQUISA

Um dos primeiros passos da pesquisa aqui citada foi uma construção de referenciais teóricos. As escolhas foram alicerçadas numa visão de sociedade em que o engenheiro exerce várias funções e necessita de uma "grande diversidade de conhecimentos" (ver Sacadura, 1999) que devem ser construídos passo a passo utilizando os recursos tecnológicos.

Procurou-se rever os processos de construção do conhecimento, repensando as práticas adotadas anteriormente e, ao tentar compreender melhor o processo ensino-aprendizagem concluiu-se que era necessário explorar a noção de registro de representações semióticas nas resoluções de problemas envolvendo equações diferenciais.

Duval (1993) coloca que as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos. Esses signos pertencem a um sistema de representação e têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. O uso das representações semióticas no contexto da matemática é bastante pertinente tendo-se em vista que os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis (por exemplo uma função). As representações semióticas vão propiciar um acesso aos objetos, são necessárias para fins de comunicação e auxiliam as atividades cognitivas do pensamento.

Um objeto matemático pode ter várias representações semióticas. Isso possibilita aos alunos fazer conversões, que segundo esse autor, é a "chave da aprendizagem".

A seqüência didática proposta para a resolução de problemas que envolvem as equações diferenciais está alicerçada nas seguintes idéias: reconhecer as diversas representações semióticas dos objetos envolvidos; propiciar a utilização de regras para o tratamento dos objetos (transformação interna a um registro, por exemplo um cálculo); trabalhar a conversão (transformação externa).

3. SEQÜÊNCIA DIDÁTICA DESENVOLVIDA

A seqüência didática utilizada está estruturada na resolução de problemas. As etapas a serem seguidas estão explicitadas nas subseções.

3.1 Organização dos dados do problema

Os dados do problema são organizados através de uma representação semiótica intermediária na forma de uma tabela. Todas as variáveis e parâmetros são listados.

3.2 Relacionamento entre as variáveis e parâmetros

Nessa etapa os alunos devem procurar responder várias perguntas: Quais os relacionamentos que visualiza entre as variáveis listadas? Quais as funções são identificáveis? Quais as taxas de variação envolvidas?

Para responder essas perguntas vários conceitos físicos, matemáticos e de engenharia devem ser resgatados. Assim, essa etapa caracteriza o processo de interdisciplinaridade, em que o professor e alunos devem refletir com os demais professores sobre o uso adequado de objetos e suas respectivas representações.

Eventualmente pode-se trabalhar alguma informação sob forma de "dicas" sem a necessidade de um aprofundamento conceitual.

3.3 Análise e formulação da equação diferencial

A etapa anterior deixa praticamente o modelo pronto, basta somente dar a formatação da equação ou equações que modelam o problema. Deve-se refletir e discutir as características do modelo obtido e, novamente, algumas questões devem ser respondidas: Qual o tipo de equação? Tem solução algébrica, numérica e gráfica?

3.4 Resolução da equação

Nessa etapa tem-se a resolução da equação. Em geral, no curso analisado, os problemas iniciais discutidos podem ser resolvidos algebricamente e graficamente, resgatando-se, portanto, as técnicas de solução usualmente discutidas conforme o tipo de equação encontrada.

3.5 Analisar a solução obtida

A solução obtida deve ser discutida. Qual o tipo de solução? As condições iniciais e/ou de contorno descritas no problema foram utilizadas? O resultado obtido é coerente com o esperado? É possível encontrar outros problemas análogos?

4. UM EXEMPLO TRABALHADO EM SALA DE AULA

Esse exemplo foi trabalhado nas turmas de quarta fase da Engenharia Civil da UNISUL - Ponte do Imaruim, em dois semestres. Trata-se de um problema prático - cálculo de deformação de vigas - discutido formalmente na disciplina de Resistência dos Materiais.

"Uma viga em balanço tem seção transversal uniforme e suporta a força *P* na sua extremidade livre *A*. Determinar a equação da linha elástica, a flecha e a declividade no ponto *A*" (ver Fig. 1).

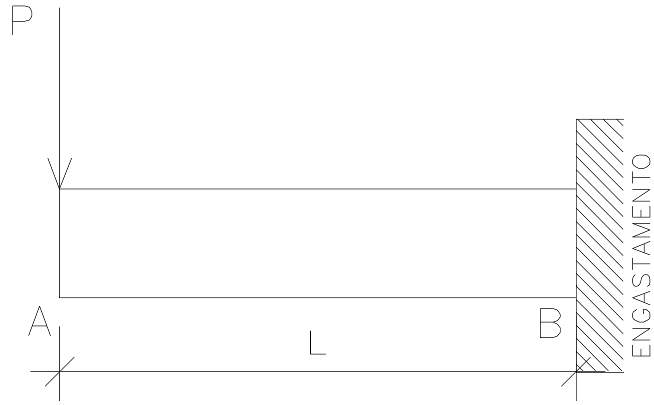


Figura 1: Viga em balanço

4.1 Organização dos dados do problema

Os dados são organizados numa tabela (ver Tabela 1).

Tabela 1. Dados do problema em análise

VARIÁVEIS	SÍMBOLOS	UNIDADES	DADOS	CONDIÇÕES DE SOLUÇÃO	
				em B	**em A**
Força	F	Newton	P		P
Momento	M	Newton x metro		M(x)	M(x)
Distância	x	metros	$0 \leq x \leq L$	L	0
Declividade	q	radianos		0	?
Flecha	y	metros		0	?

4.2 Relacionamento entre as variáveis e parâmetros

Na Engenharia Civil discute-se a flexão de vigas sob a ação de cargas (inclusive o próprio peso). A Fig. 2 ilustra uma viga prismática que, em geral, é discutida engastada ou bi-apoiada. Admite-se que a viga é homogênea quanto ao material e é formada por fibras longitudinais.

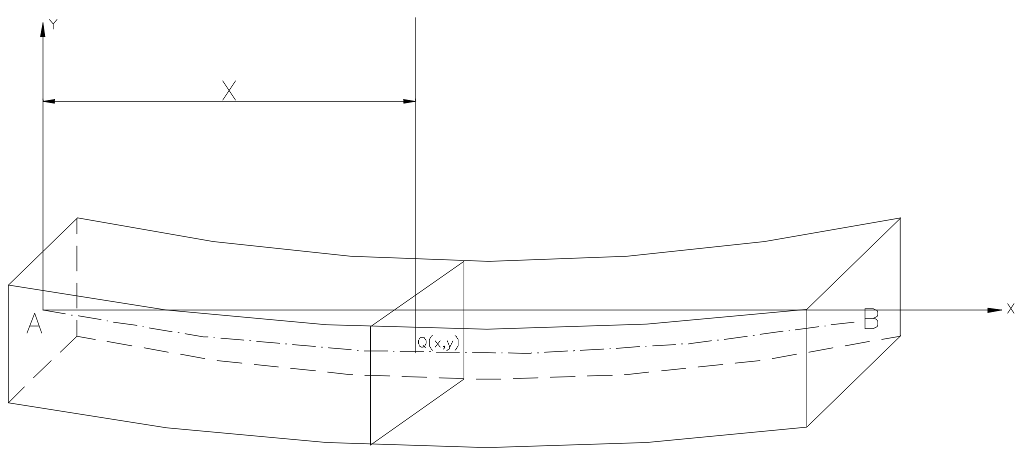


Figura 2: Viga do tipo prismática

Na flexão visualizada as fibras da metade superior são comprimidas e as da metade inferior são tracionadas. Assim, a viga fica identificada por duas partes separadas por uma *superfície neutra* cujas fibras não sofrem tração nem compressão.

As vigas são estudadas através de seções transversais (ver Fig. 2). A curva *AB* é denominada *curva elástica.*

Uma seção é alocada num sistema de eixo cartesiano e assim podemos definir $y = f(x)$ como a equação da curva elástica em que a ordenada y é denominada de *flecha da viga*.

As especificações para o cálculo ou dimensionamento das vigas, impõem, freqüentemente, limites para as flechas. Assim é essencial que o calculista saiba determinar as flechas. Nash (1992) coloca que "em diversas normas de cálculo de edifícios se estabelece que a flecha máxima, nas vigas, não deve exceder 1/300 de seu vão".

Para determinar a curva elástica pode-se usar uma equação diferencial que modela o problema em geral (ver Eq. 1).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{1}$$

sendo E = módulo de elasticidade do material da viga
I = momento de inércia da seção transversal em relação a linha neutra
M = momento fletor.

Em geral, I e M são funções de x. Nas vigas prismáticas somente M é uma função em x.

Matematicamente a Eq. (1) pode ser deduzida envolvendo conceitos do cálculo elementar. Observando a Fig. 2 tem-se que *AB* é a interseção da seção transversal com a superfície neutra e Q é o ponto de interseção entre *AB* e a curva elástica nessa seção. Da Física tem-se que o momento *M*, em relação à *AB*, de todos as forças que agem em qualquer das partes em que a viga foi dividida pela seção é independente da parte considerada e é dada por

$$M = \frac{EI}{R} \tag{2}$$

sendo R o raio de curvatura da curva elástica no ponto Q.

Supondo que a viga seja substituída pela sua curva elástica e a seção transversal pelo ponto $Q=Q(x,y)$ pode-se calcular a curvatura da curva elástica (ver Flemming e Gonçalves, 2000, p.88). Tem-se:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\,. \tag{3}$$

Como a declividade $tg\theta = \frac{dy}{dx}$ da curva elástica, em qualquer ponto, é muito pequena pode-se escrever

$$R \cong \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{4}$$

Substituindo a Eq. (4) na Eq. (2) tem-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{5}$$

que é a equação diferencial linear de segunda ordem que modela o cálculo de vigas.

4.3 Análise e formulação da equação diferencial

A Eq. (5) é a equação que modela os problemas de viga em geral. Para o problema em análise tem-se que *M* é uma função de *x* que deve ser definida mais especificamente. O momento *M(x)* é o produto da força *P* pela sua distância (ver Fig. 3).

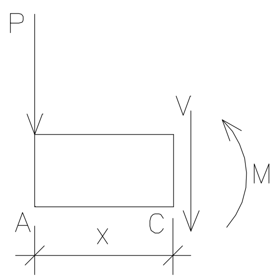


Figura 3: Momento fletor

Assim,

$$M(x) = -Px . \tag{6}$$

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (5) obtém-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Px}{EI} \tag{7}$$

que é a equação que modela o problema dado.

4.4 Resolução da equação

A Eq. (7) é facilmente resolvida por integração direta. Tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{-Px}{EI} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right). \tag{8}$$

Usando as condições iniciais do problema (ver Tabela 1) tem-se $y'(L) = 0$. Assim, $C_1 = \dfrac{-L^2}{2}$.

A declividade $\dfrac{dy}{dx}$ fica

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right). \tag{9}$$

Usando novamente a integração direta, tem-se

$$y = \int \frac{-P}{2EI}(x^2 - L^2)dx$$

$$y = \frac{-P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - L^2 x + C_2\right). \tag{10}$$

Usando as condições da Tabela 1 tem-se $y(L) = 0$ e, portanto, $C_2 = \dfrac{2}{3}L^3$.

A Eq. (10) fica reescrita como

$$y = \frac{-P}{6EI}\left(x^3 - 3L^2 x + 2L^3\right) \tag{11}$$

que é a equação da *curva elástica*.

No ponto A tem-se $x=0$ e $y = \dfrac{-PL^3}{3EI}$ que é o valor da *flecha em A*.

A declividade em A é obtida usando a Eq. (9), ficando $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{PL^2}{2EI}$.

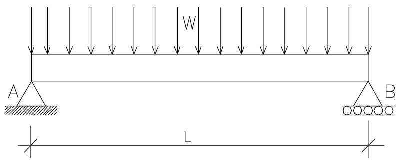
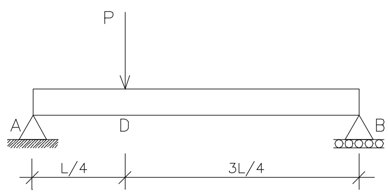
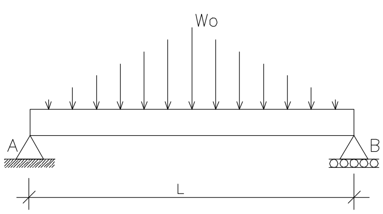
4.5 Analisar a solução obtida

Observa-se que a curva elástica pode ser escrita na forma de uma solução geral da Eq. (7),

$$y = \frac{-P}{6EI}(x^3 + 6C_1 x + 6C_2) \tag{12}$$

sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias que podem ser particularizadas usando-se as condições iniciais do problema. O resultado obtido é coerente com o esperado e é possível encontrar vários problemas análogos. As variações acontecem no cálculo do momento fletor *M(x)*. A Tabela 2 mostra exemplos comumente discutidos na disciplina de Resistência dos Materiais.

Tabela 2. Exemplos de flexão de vigas

PROBLEMA	EQUAÇÃO	RESULTADOS
	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{+w.L}{2.EI}.x-w.x.\frac{x}{2.EI}$	**Curva Elástica** $y=\frac{w}{24.EI}(-x^4+2.L.x^3-L^3.x)$ **Flecha** $ymáx=-\frac{5.w.L^4}{384.EI}$
	$x>\frac{L}{4}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3.P.x}{4.EI}-\frac{P(x-\frac{L}{4})}{EI}$ $x<\frac{L}{4}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3.P.x}{4.EI}$	**Curva Elástica** $y=\frac{1}{8}.\frac{P.x^3}{EI}-\frac{7.P.L^2}{128.EI}.x$ **Flecha em D** $y_D=-\frac{3.P.L^3}{256.EI}$
	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{wo.L.x}{4.EI}-\frac{w.x^3}{3.L.EI}$	**Curva Elástica** $y=\frac{wo.L.x^3}{24.EI}-\frac{wo.x^5}{60.L.EI}-\frac{5.wo.L^3.x}{192.EI}$ **Flecha** $ymáx=-\frac{wo.L^4}{120.EI}$

5 CONCLUSÕES

A seqüência didática proposta propicia a construção dos conhecimentos necessários para a resolução de vários problemas. A representação intermediária (mostrada na tabela 1) auxilia o raciocínio lógico e abre espaço para a busca dos conceitos físicos e de engenharia necessários para a resolução do problema. A troca de idéias, com outras áreas, torna-se inevitável e a busca de métodos para serem utilizados produzem um processo interdisciplinar na medida em que professores de disciplinas diferentes trocam métodos e técnicas para um bom entendimento de diversos conteúdos.

Pretende-se, a partir dos resultados já obtidos, produzir um curso de equações diferenciais completamente voltado para a resolução de problemas. Um Banco de Problemas está em fase de construção, permitindo ao professor fazer escolhas adequadas a cada turma e a cada Engenharia.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica*, p. 97-140. Bogotá, 1995.

DUVAL, R. Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 5, p. 37-65. IREM de Strasbourg, 1993.

FLEMMING, D.M. e GONÇALVES, M.B. *Cálculo C: Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície*. Makron Books, São Paulo, 2000.

NASH, W. A. *Resistência dos Materiais*. McGraw-Hill - Coleção Schaum, 3ª ed. São Paulo, 1992.

SACADURA, J. A formação dos engenheiros no limiar do terceiro milênio. *Formação do Engenheiro. Editora da UFSC*, p. 15-27. Florianópolis, 1999.