



**COBENGE 2005**

**XXXIII - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**

“Promovendo e valorizando a engenharia em um cenário de constantes mudanças”

12 a 15 de setembro - Campina Grande - Pb

Promoção/Organização: ABENGE/UFPG-UFPE

## ***ID HEAT TRANSFER: UM SOFTWARE PARA O ESTUDO DE PROBLEMAS DIFUSIVOS-CONVECTIVOS UNIDIMENSIONAIS***

**Wilton P. Silva** – [wiltonps@uol.com.br](mailto:wiltonps@uol.com.br)

Universidade Federal de Campina Grande, CCT, Departamento de Física  
58109-970 – Campina Grande – PB

**Cleitton D. P. S. Silva** – [cleitondiniz@directnet.com.br](mailto:cleitondiniz@directnet.com.br)

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Doutorando em Sistemas e Controle  
12228-900 – São José dos Campos – São Paulo

**Antonio G. B. Lima** – [gilson@dem.ufcg.edu.br](mailto:gilson@dem.ufcg.edu.br)

Universidade Federal de Campina Grande, CCT, Departamento de Engenharia Mecânica  
58109-970 – Cx. Postal 10069 – Campina Grande – PB

**Resumo:** *Este trabalho visa a comunicar o desenvolvimento do software ID Heat Transfer, destinado ao estudo de problemas difusivos-convectivos de transferência calor em uma dimensão (paredes, cilindros e esferas). O software, desenvolvido em Visual Fortran, possibilita simular vários tipos de problemas por facultar ao usuário a definição de funções que caracterizam tanto as condições iniciais quanto os parâmetros de processo variáveis. A equação governante do problema de difusão e convecção de calor unidimensional foi resolvida numericamente utilizando o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita. Com a finalidade de validar o produto desenvolvido, vários problemas foram simulados e os resultados obtidos são coerentes com as respectivas soluções analíticas. Problemas que não possuem solução analítica também foram simulados e os resultados obtidos estão em total acordo com os de outros softwares disponíveis no mercado.*

**Palavras-chave:** Software, Difusão, Convecção, Unidimensional, Volumes finitos

### **1. INTRODUÇÃO**

Uma área importante no ensino de vários ramos de engenharia é aquela referente à transferência de calor. Com relação a esta área, em particular, existe, no mercado, uma farta oferta de livros-texto de preço acessível e, dentre estes, podem ser citados BEJAN (1993), BEJAN (1995), KREITH e BOHN (2001), INCROPERA e DeWITT (2002) e KAVIANY (2002). Em contraste com a ampla disponibilidade de livros-texto na área de transferência de calor, escassos são os *softwares* destinados ao ensino desta matéria. A maioria dos pacotes disponíveis no mercado, como o CFX (<http://www-waterloo.ansys.com/cfx>), é muito cara e relativamente complexa, inviabilizando o seu uso por parte de alunos iniciantes no tema. Repetidas buscas na Internet possibilitam afirmar que praticamente inexistem *softwares* destinados ao ensino de transferência de calor. Uma “exceção a essa regra” é o Transcal V 1.1 desenvolvido por MALISKA et al (1998), destinado ao estudo bidimensional de condução de calor. Uma dentre as várias características favoráveis deste software é a facilidade de uso, o que o torna num poderoso aliado de alunos no estudo de disciplinas ligadas à transferência de

calor. Conforme os autores, “ele é utilizado para induzir o raciocínio investigativo sobre os fenômenos físicos envolvidos através da simulação e visualização de fenômenos simples e educativos”. Por resolver problemas de condução de calor bidimensionais transientes (ou em regime permanente), com (ou sem) geração de calor e em domínios arbitrários, “praticamente todos os problemas que se discute em sala de aula podem ser resolvidos e investigados com o auxílio do software”. Embora seja um software poderoso para os fins a que se destina, o Transcal, em sua versão atual, não possibilita que problemas difusivos-convectivos sejam simulados, e isso é um fator que limita o seu uso. Além disso, o *software* só possibilita simulações para termos fonte e propriedades do meio constantes.

Este trabalho visa a apresentar o *software 1D Heat Transfer*, desenvolvido com o objetivo de contribuir para o enriquecimento do pequeno acervo de *softwares* didáticos sobre transferência de calor disponíveis no mercado. O *software* possibilita simular problemas unidimensionais tanto difusivos como também difusivos-convectivos, com propriedades do meio e termo fonte constantes ou variáveis, que podem ser facilmente implementados pelo usuário.

## 2. O SOFTWARE 1D HEAT TRANSFER: CONCEPÇÕES GERAIS

Embora seja unidimensional, o *software* foi concebido para ser bastante abrangente no tocante à possibilidade de simular problemas. Basicamente o *1D Heat Transfer*, que tem opções de uso em Português e em Inglês, simula problemas em regime permanente e transiente resolvendo a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p u T) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}, \quad (1)$$

em que

$\rho$  é a densidade do meio;

$c_p$  é o calor específico do meio;

$T$  é a temperatura em uma dada posição do meio;

$u$  é a velocidade do meio;

$k$  é a condutividade do meio;

$\dot{q}$  é o termo fonte.

A equação (1) pode ser entendida mais facilmente por estudantes através de um prévio estudo sobre fenômenos de transporte, o que pode ser feito, por exemplo, em BIRD et al (1960), seguido de um estudo específico sobre transferência de calor e métodos numéricos, tema disponível, por exemplo, em VERSTEEG e MALALASEKERA (1995) e em MALISKA (2004). No *1D Heat Transfer* a equação (1) é discretizada e resolvida numericamente usando o método dos volumes finitos através da formulação totalmente implícita.

Durante a concepção do *1D Heat Transfer* ficou estabelecido que o *software* deveria poder ser usado para resolver problemas envolvendo transferência de calor unidimensional (paredes, cilindros e esferas). Devido ao propósito de torná-lo o mais geral possível, ficou também estabelecido que, nas simulações, as propriedades do meio pudessem ser tanto constantes quanto variáveis, requisito também imposto ao termo fonte. Por isso, houve a necessidade do desenvolvimento de um *function parser*, isto é, um avaliador de funções em

*Fortran*, que foi a linguagem usada em todo o pacote. Detalhes sobre o *parser* desenvolvido e o acesso ao seu código fonte está disponível em SILVA e SOARES (2003). Detalhes sobre a linguagem de programação *Fortran* para *Windows* podem ser obtidos em SILVA et al (2002).

Com o objetivo de se extrair o máximo de informações de um problema, durante a sua simulação em regime transiente, um “gráfico dinâmico” deveria ser gerado, mostrando a distribuição de temperatura no domínio a cada intervalo de tempo. Além disso, ao final da execução deveria ser plotado o gráfico da temperatura em função do tempo para um volume de controle estipulado pelo usuário. Já para o caso de problemas em regime permanente, no final da simulação deveria ser plotado um gráfico com o perfil de temperatura.

No caso de problemas difusivos-convectivos o usuário deveria ter a opção entre dois esquemas de interpolação: CDS e upwind. O próprio *software* deveria sugerir a melhor opção entre os dois esquemas baseada no cálculo do número de Peclet. Quanto à solução do sistema de equações lineares gerado a partir da discretização da equação diferencial parcial, o usuário deveria poder optar por um dos métodos: tabela LU ou Gauss-Sidel.

### 3. APRESENTAÇÃO DO *1D HEAT TRANSFER* AO USUÁRIO

O *software* foi concebido para ser usado por alunos iniciantes no estudo de transferência de calor e, portanto, deveria ser simples e de fácil uso. A plataforma escolhida para o desenvolvimento do *software* foi *Windows*, embora ele possa ser executado na plataforma *Linux* com o auxílio de programas como o *Winehq* (<[www.winehq.com](http://www.winehq.com)>). A seguir, serão apresentadas algumas das características do *software*.

#### 3.1 O menu arquivo

O menu “Arquivo” é usado para a definição de novos arquivos de dados e também para a abertura daqueles anteriormente definidos, bem como para fechar o software, conforme pode ser visto na Figura 1.

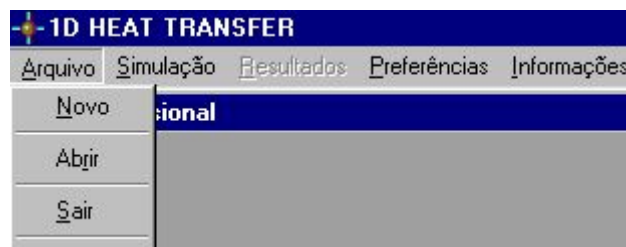


Figura 1 – O menu “Arquivo”

O menu “Arquivo” é composto pelos itens “Novo”, “Abrir” e “Sair”. Clicando no item “Novo” (ou “Abrir”) aparece um conjunto de caixas de diálogos para a informação (ou correção) dos dados referentes à simulação.

A primeira caixa de diálogo tem o objetivo de adquirir dados gerais comuns tanto ao regime permanente como ao transiente, e pode ser vista na Figura 2. Nesta caixa, inicialmente deve ser informada a distância  $L_x$  (para paredes,  $L_x$  é a largura; para cilindros longos,  $L_x$  é o comprimento; para esferas,  $L_x$  é um terço do raio – com fluxo zero no centro – e para paredes semi-infinitas,  $L_x$  deve ser bem maior que a posição a ser estudada). Na sequência, deve ser informado o número  $N$  de volumes de controle em que o corpo será subdividido (de 3 até 1000). Seguem-se as informações: a condutividade  $k$  do meio e os termos  $Sc$  e  $Sp$  do termo fonte na sua forma linearizada. Para estes três últimos dados podem-se informar tanto valores

constantes como variáveis (funções da temperatura  $T$ ). Para problemas de difusão pura basta fazer a velocidade  $u$  do meio igual a zero. Deve-se informar, ainda, o regime a ser simulado

**1D Heat Transfer - General Information**

Passo 1 - Estabelecimentos: regimes permanente e transiente

Distância entre os contornos:  $L_x =$

Número de volumes de controle:  $N =$   De 3 até 1000

Condutividade térmica do meio:  $K =$    $\leq$  Const. ou  $f(T)$

Termo fonte  $S = S_p T + S_c$ :  $S_c =$    $\leq$  Const. ou  $f(T)$

Termo fonte  $S = S_p T + S_c$ :  $S_p =$    $\leq$  Const. ou  $f(T)$

Convecção-Difusão: velocidade  $u =$    $\leq$  Maior ou igual a zero

Regime:  Permanente  Transiente

Método:  Use Gauss-Sidel (default: tab. LU)

Figura 2 – Aquisição de dados comuns ao regime permanente e transiente

(permanente ou transiente) e o método para a solução do sistema de equações lineares oriundo da discretização da equação diferencial parcial: o *default* é tabela LU mas, marcando-se a caixa de checagem, o método passa a ser o de Gauss-Sidel.

Caso a simulação seja relativa a um regime transiente, após clicar no botão “Passo 2” aparece uma caixa de diálogo para a aquisição de dados necessários à simulação deste tipo de regime, o que pode ser visto na Figura 3.

**1D Heat Transfer - Unsteady State (or convective problem)**

Passo 2 - Estabelecimentos: regime transiente (ou problema convectivo)

Temperatura inicial:  $T_i =$    $\leq$  Const. ou  $f(x)$

Densidade do meio:  $\rho_o =$    $\leq$  Const. ou  $f(T)$

Calor Específico:  $C_p =$    $\leq$  Const. ou  $f(T)$

Intervalo de tempo:  $\Delta_t =$

Número de passos no tempo:  $N_{pt} =$

Acompanhar transiente do nó: Nó =

Figura 3 – Aquisição de dados relativos ao regime transiente

Nesta caixa deve-se informar, na ordem, a temperatura inicial (constante ou função da posição  $x$ ), a densidade e o calor específico do meio (constantes ou funções da temperatura  $T$ ). Deve-se informar, ainda, o intervalo de tempo e o número de passos no tempo, que é o número de avanços (incrementos) do intervalo de tempo estipulado. Por último, deve-se estipular um nó (volume de controle) para que seja acompanhado o seu regime transiente. Além deste volume estipulado; dois outros pontos do meio têm o seu regime transiente acompanhado: os contornos oeste e leste.

Para fins de informação de dados na caixa de diálogo anterior, se em um problema forem dadas a condutividade e a difusividade térmica, pode-se atribuir um valor fictício, por exemplo, para a densidade do meio, e determinar o correspondente calor específico.

A próxima caixa de diálogo visa a adquirir a condição de contorno oeste, conforme pode ser visto na Figura 4.

1D Heat Transfer - West Boundary

Passo 3 - Condição de contorno oeste - Em  $x = 0.0$ :

Temperatura  
Temperatura em  $x = 0.0$ :  $T =$

Fluxo  
Fluxo em  $x = 0.0$   $F_i =$    
P/ dentro: positivo - P/ fora: negativo

Convecção  
Coeficiente convectivo em  $x = 0.0$ :  $h =$    
Temperatura ambiente em  $x = 0.0$ :  $T_{inf} =$

<< Passo 2    Cancelar    Passo 4 >>

Figura 4 – Condição de contorno oeste

Existem três condições de contorno disponíveis: temperatura, fluxo e convecção. No caso da condição de contorno ser o fluxo, deve-se tomar o cuidado com a seguinte convenção: fluxo entrando no volume de controle é positivo e saindo é negativo. Informando uma destas três condições, as demais caixas de edição ficam indisponíveis e deve-se passar para a caixa seguinte, que visa a adquirir a condição de contorno leste. A condição de contorno leste é obtida na quarta caixa de diálogo, vista na Figura 5. Esta caixa obedece às mesmas observações da caixa de diálogo para a aquisição da condição de contorno oeste.

### 3.2 O menu resultados

Após a simulação de um problema, o menu “Resultados”, que estava desabilitado, passa a ter a aparência mostrada na Figura 6. Este menu possibilita selecionar e depois copiar os gráficos traçados durante a simulação. Possibilita, ainda, inspecionar o conjunto de dados

relativos à simulação recém concluída, através do item “Conjunto de Dados”. Clicando-se no item “Fluxos nos Volumes de Controle” é aberto um arquivo destacando os volumes de



Figura 5 – Condição de contorno leste



Figura 6 – O menu “Resultados”

controle e os fluxos oeste e leste de cada um destes volumes (relativo ao regime permanente ou ao último passo de tempo do regime transiente). Já o item “Fluxo versus Posição” abre um arquivo que contém dados do fluxo em função da posição, e pode ser utilizado para determinar os parâmetros de uma função que dá o fluxo final em função de  $x$ , através de ajuste de curvas. Os dados contidos neste arquivo são relativos ao regime permanente ou ao último passo de tempo do regime transiente. O item “Regime Transiente” abre um arquivo

com a informação sobre a temperatura em função do tempo referente ao nó estipulado pelo usuário. O arquivo pode ser usado para se determinar os parâmetros de uma função que dá a temperatura  $T$  em função do tempo  $t$ , por ajuste de curvas. Esta última informação pode ser estendida para os itens “Contorno Oeste” e “Contorno Leste”. Já o item “Regime Permanente” abre um arquivo que contém dados da temperatura final em função da posição e ele também pode ser usado para fins de ajuste de curvas. Com relação ao regime transiente, caso o usuário opte por não incluir informações relativas ao regime permanente, as informações sobre o último passo de tempo são colocadas neste arquivo. O último item, “Imprimir Tela”, é usado para a impressão dos gráficos traçados durante a simulação.

### 3.3 O menu preferências

Este menu possibilita mudar a cor dos gráficos a serem traçados durante a simulação e também a escolha de um dos dois idiomas disponíveis para a interface com o usuário: Português e Inglês. Além disso, o usuário pode estipular uma tolerância para a solução dos sistemas de equações lineares, via Gauss-Sidel, diferente da tolerância *default*, que é  $10^{-8}$ . Os itens relativos a este menu podem ser vistos na Figura 7.

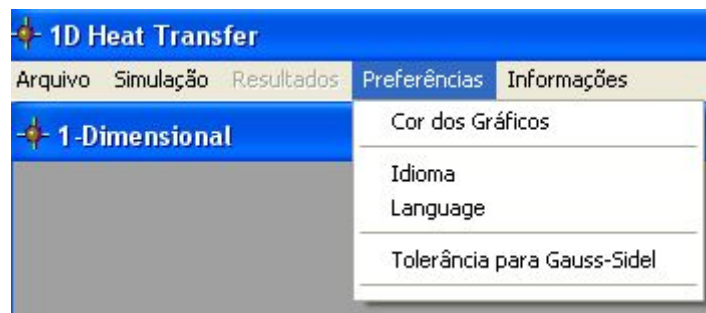


Figura 7 – O menu “Preferências”

### 3.4 O menu informações

O menu “Informações” possibilita ao usuário o acesso à “Ajuda” do *software* e a outros itens informativos conforme pode ser visto na Figura 8.

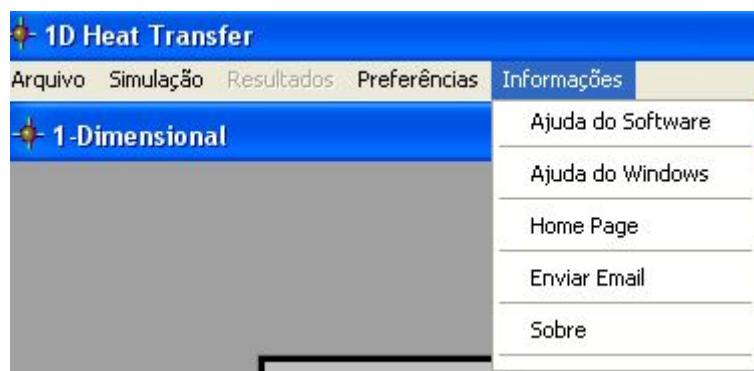


Figura 8 – O menu “Informações”

## 4. SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS TÍPICOS

Para validar o *software*, vários problemas de solução conhecida foram simulados, e alguns destes problemas podem ser acessados clicando-se no item “Abrir” do menu “Arquivo”. Aqui, dois problemas serão simulados: um deles é referente à difusão pura (velocidade  $u$  do meio igual a zero) e o outro envolve tanto difusão quanto convecção. Uma visualização para os dois problemas a serem simulados pode ser obtida através do esquema mostrado na Figura 9.

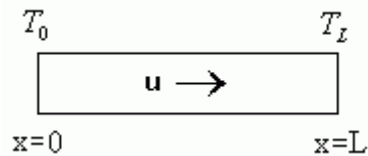


Figura 9 – Esquema para a visualização da transferência unidimensional de calor

#### 4.1 Condução unidimensional transiente

A simulação que será apresentada é proposta por MALISKA (2004) e, no *1D Heat Transfer*, os dados estão em um arquivo denominado “Maliska S\_10\_5\_2 (initial T is f(x)).txt”. O problema envolve a distribuição inicial de temperatura em um corpo, dada como segue:

$$T(x,0) = T_0 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (2)$$

No instante  $t=0$  o corpo passa a sofrer um processo transiente em que as temperaturas oeste e leste são mantidas em zero. Este problema tem solução analítica dada através da equação a seguir:

$$T(x,t) = T_0 e^{-\alpha t} \text{sen}(\lambda^{1/2} x) \quad (3)$$

onde  $\lambda = \frac{\pi^2}{L^2}$  e  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ .

Para os dados  $u = 0$  m/s, com as temperaturas  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  em  $x = 0$  e  $T_L = 0^\circ\text{C}$  em  $x = L$ , supondo que  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 800 \text{ J/kgK}$ ,  $k = 10 \text{ W/mK}$ ,  $T(x,0) = 400 \text{sen}(50\pi x)^\circ\text{C}$  e  $L = 0,02 \text{ m}$ , utilizando o *1D Heat Transfer*, a evolução do perfil de temperatura no tempo pode ser analisada através da Figura 10, traçada pelo software, para um intervalo de tempo de 1 s, durante 50 s, com o corpo subdividido em 51 volumes de controle. Por outro lado, o volume de controle central do corpo, escolhido para ter o seu transiente acompanhado, tem a sua temperatura variando ao longo do tempo conforme pode ser visto na Figura 11.

Após a simulação, clicando-se no item “Regime Permanente” do menu “Resultados”, obtém-se um arquivo de dados que dá a temperatura de cada volume de controle. Nesta simulação, este arquivo apresenta o valor zero para todos os volumes de controle, como é fisicamente esperado para este problema após um intervalo de tempo suficientemente grande.

#### 4.2 Convecção e difusão unidimensional permanente

A simulação a ser apresentada é abordada por VERSTEEG e MALALASEKERA (1995) e envolve o movimento do meio com uma velocidade constante  $u = 2,5$  m/s, com as



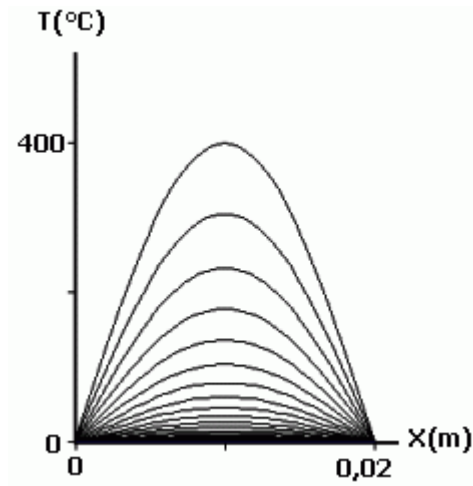


Figura 10 – Evolução da distribuição de temperatura do corpo resfriado ao longo do tempo

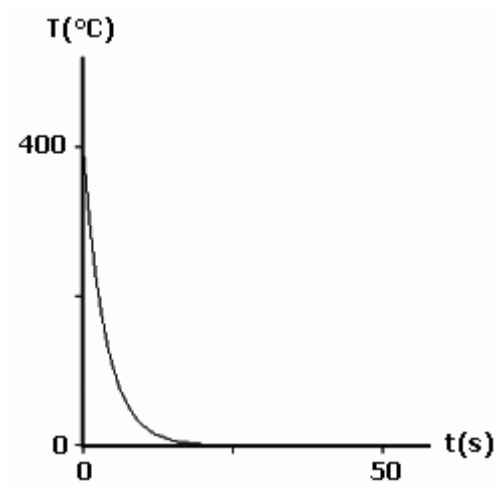


Figura 11 – Temperatura T do volume de controle central do corpo em função do tempo t

temperaturas adimensionais  $T_0 = 1$  em  $x = 0$  e  $T_L = 0$  em  $x = L$ , sendo  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $k = 0,1 \text{ W/mK}$  e  $L = 1 \text{ m}$ . Este problema possui solução analítica que é dada por

$$\frac{T - T_0}{T_L - T_0} = \frac{\exp(\rho u x / k) - 1}{\exp(\rho u L / k) - 1} \quad (4)$$

No *1D Heat Transfer*, o arquivo de dados para este problema foi denominado “The Finite Volume Method Ex 5\_1 Case 3.txt”. Para tal arquivo de dados, a solução analítica deve ser escrita assim:

$$T = 1,0 - 1,3887943 \times 10^{-11} \exp(25,0x) \quad (5)$$

A superposição da solução analítica com a solução numérica pode ser vista na Figura 12, para 20 volumes de controle.

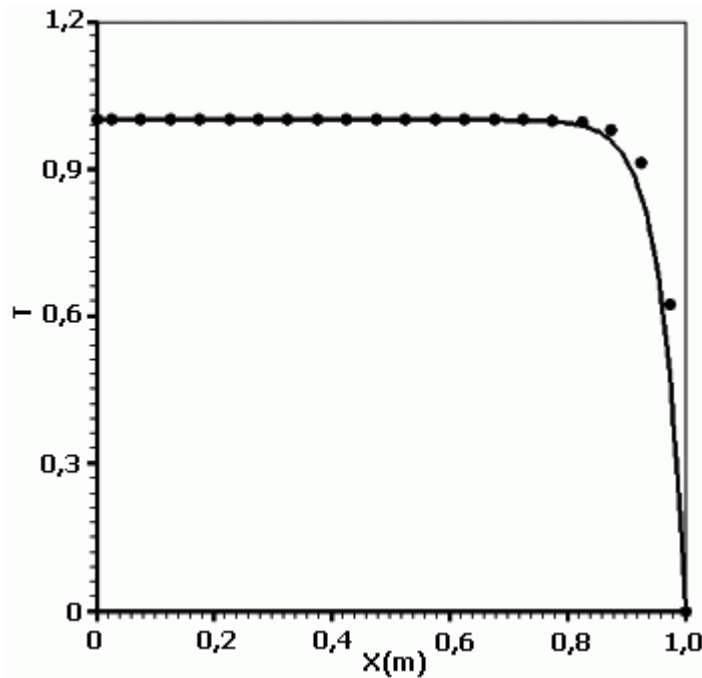


Figura 12 – Soluções analítica (linha contínua) e numérica (pontos) usando CDS.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O *software* apresentado teve a sua origem em estudos desenvolvidos pelo primeiro autor visando ao cumprimento de tarefas da disciplina Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional; do curso de doutorado em Engenharia de Processos oferecido pela Universidade Federal de Campina Grande. Vislumbrando a possibilidade de colocar o produto desenvolvido na pós-graduação à disposição de alunos de graduação, várias generalizações foram feitas buscando tornar o *software* ao mesmo tempo simples, confiável e geral para problemas unidimensionais. Devido a isso, um grande número de simulações foi realizado no produto final, envolvendo várias possibilidades de condições de contorno e de situações físicas, com resultados compatíveis tanto com soluções analíticas quanto com os de outros *softwares*. Naturalmente, o *1D Heat Transfer* é um projeto em aberto, que será modificado à medida que possibilidades de melhoramento forem sendo detectadas. Conforme já foi mencionado, o *software*, desenvolvido para *Windows*, também pode ser executado na plataforma *Linux*. Assim, a intenção dos autores é melhorar a versão do *1D Heat Transfer* para *Windows*, ao invés da criação de uma versão específica para *Linux* porque, desta forma, os usuários das duas plataformas serão beneficiados.

Embora seja intenção dos autores manter a versão em Inglês do *software* como um *shareware*, a versão em Português é um *freeware*. Para que estudantes brasileiros tenham acesso à chave de desbloqueio definitivo, após 40 execuções experimentais livres, basta enviar, a partir do próprio *software*, um *email* formalizando o pedido. Quanto ao acesso ao *1D Heat Transfer*, o *software* está disponível em inúmeros *sites* de *download* em várias partes do mundo, e também em sua página oficial: <<http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/ht.htm>>.

### Agradecimentos

Os autores deste trabalho agradecem à FAPESP pela concessão de bolsa de Doutorado e ao CNPq pela concessão de bolsa de Produtividade em Pesquisa, bem como aos autores referenciados que, com suas pesquisas, contribuíram na realização deste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEJAN, A. **Heat Transfer**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1993
- BEJAN, A. **Convection Heat Transfer**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1995
- BIRD, R. B. et al. **Transport Phenomena**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1960
- INCROPERA, F. P. ; DeWITT, D. P. **Heat and Mass Transfer**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2002
- KAVIANY, M. **Principles of Heat Transfer**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2002
- KREITH, F. ; BOHN, M. S. **Principles of Heat Transfer**. Australia: Brooks/Cole, 2001
- MALISKA, C. R. et al. **Transcal V 1.1 (1998)**, software livre disponível em <<http://www.sinmec.ufsc.br/sinmec/software/transcal.html>> acesso em 25/05/2005
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. Rio de Janeiro: LTC Editora S. A., 2004
- SILVA, W. P. ; SOARES, I. B. **Fortran Function Parser (2003)**, código aberto disponível em <[www.extension.hpg.com.br](http://www.extension.hpg.com.br)> acesso em 17/05/2005
- SILVA, W. P. et al. **VFortran Tutorial –Programação no Visual Studio (2002)**, disponível em <[www.extensao.hpg.com.br](http://www.extensao.hpg.com.br)> acesso em 17/05/2005
- VERSTEEG, H. K. ; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. Harlow: Pearson Education, 1995

### 1D HEAT TRANSFER: A SOFTWARE FOR THE STUDY OF ONE-DIMENSION PROBLEMS INVOLVING DIFFUSION AND CONVECTION

**Abstract:** *This paper seeks to communicate the development of a software 1D Heat Transfer for the study of problems involving heat transfer with diffusion and convection in one dimension (walls, cylinders and spheres). The software, developed in Visual Fortran, facilitates the simulation several types of problems for allowing the user the definition of functions that characterize variable parameters (initial conditions and parameters for the domain). The equation of the diffusion-convection for the heat transfer in one dimension was solved through the method of the finite volumes with a implicit formulation. For purposes of validating of the developed product, several problems were simulated and the obtained results were coherent with the respective analytic solutions. Problems which don't possess analytic solution were also simulated and the obtained results are in agreement with the available softwares.*

**Keywords:** Software, Diffusion, Convection, One-dimension, Finite volumes